MATHÉMATIQUES ET LOGIQUE : QUEL RÔLE DANS LA DÉMARCHE SCIENTIFIQUE ?

Bernard Yao KOUASSI
Université Alassane Ouattara
Département de Philosophie

Résumé

Le rôle des mathématiques et de la logique dans la démarche scientifique est l'objectif principal qui a suscité ce travail de réflexion. Cependant, les débats controversés sur la nature des mathématiques et de la logique ont suscité un objectif secondaire. Cet objectif secondaire est une analyse de la relation qui existe entre les mathématiques et la logique selon les conceptions sur leurs natures respectives. De cette analyse, il ressort que des divergences existent entre les mathématiques et la logique comme le notent certains savants. Mais ces divergences ne sont que des différences de degré. Car en plus, leurs rôles respectifs, bien que différents, se complètent dans la démarche scientifique en vue de l'élaboration de la connaissance scientifique la plus objective en lui consacrant son caractère universel.

Mots clés : Connaissance objective, Convergences, Démarche scientifique, Divergence, Logique, Mathématiques, Rôle.

Abstract

The role of Mathematics and Logics in the scientific approach is the principal objective that the present reflection addresses. Yet, the controversies about the nature of the two scientific fields fuel a secondary objective that consists in analyzing the relationships between them, in connection with the views about their respective nature. It can be inferred from this analysis that there are some divergences between Mathematics and Logics as noted by some scholars. Nevertheless, such divergences are different in degree. In addition to their respective roles, although such roles are different, Mathematics and Logics are complementary as to the scientific approach in the sense of the elaboration of the scientific knowledge in the most objective way, by attributing its universal feature.

Keywords: Objective knowledge; Convergences; Scientific approach; Divergence; Logics; Mathematics; Role.

INTRODUCTION

De toutes les disciplines humaines qui se sont lancées à la recherche du savoir dans l'optique de permettre à l'homme d'appréhender le monde, aucune ne construit, sans nul doute, de connaissances plus adéquates et plus objectives que la science. Cette qualité qui caractérise la science serait inscrite dans son essence même. André Lalande (1997, p. 954) l'exprime bien, dans sa définition de la science:

> ensemble de connaissances et de recherches ayant un degré suffisant d'unité, de généralité et susceptibles d'amener les hommes qui s'y consacrent à des conclusions concordantes qui ne résultent ni de conventions arbitraires ni d'intérêts personnels, mais de relations objectives que l'on confirme par des méthodes de vérifications définies.

La science telle que définie par Lalande est caractérisée par l'unanimité, l'universalité et la positivité, certifiées par des démarches réversibles. Si la science est considérée comme la discipline qui approche de plus près la vérité dans la connaissance du réel, c'est-à-dire dont le discours ou la pensée concorde avec l'objet du discours, c'est grâce au statut et au mode de fonctionnement de la plupart des disciplines scientifiques au nombre desquelles se trouvent entre autres les mathématiques et la logique. Respectivement science des grandeurs, de l'ordre et de la mesure et science du raisonnement, les mathématiques et la logique, malgré les controverses qui divisent les scientifiques sur leur nature et sur leurs rôles respectifs, semblent jouer un rôle prépondérant dans la démarche scientifique.

Dès lors, pour mieux comprendre ce qui divise les scientifiques sur la relation qui existe entre les mathématiques et la logique d'une part et d'autre part, leur apport respectif dans la démarche scientifique, surgissent les interrogations suivantes : quelles relations les mathématiques et la logique entretiennent-elles ? Cette interrogation ouvre sur la question principale de cette réflexion : quels sont les rôles des mathématiques et de la logique dans la démarche scientifique ?

Ces questions dont le but principal est de mettre en exergue l'apport des mathématiques et de la logique dans l'approche scientifique, seront, à l'aide d'une méthode analytique, examinées, selon une cadence binaire. La première partie révèlera la nature de la relation entre les mathématiques et la logique la deuxième se penchera sur le rôle des mathématiques et de la logique dans la démarche scientifique.

I. Relations mathématiques et logique : divergences et convergences

Relever les divergences et les convergences entre les mathématiques et la logique consiste à mettre à nu aussi bien les points de dissimilitudes que les points d'ancrages entre ces deux disciplines scientifiques. C'est l'objet de cette première partie de cette réflexion.

1. Divergences entre mathématiques et logique

Définissant les mathématiques, A. Lalande (1997, p. 595) écrit qu'elles sont le : « nom générique de toutes les sciences qui ont pour objet le nombre, l'ordre ou l'étendue ». Quant à la logique elle est une science ayant pour objet de déterminer parmi tous les jugements, lesquels sont valides et lesquels ne le sont pas. À ce propos, A. Lalande écrit (1997, p. 573), « la logique est la science qui étudie les principes généraux de la pensée valide». Au regard de ces définitions des différences fondamentales existent entre les mathématiques et la logique. Une première différence peut être soulignée déjà au niveau de leur essence respective.

Les mathématiques apparaissent comme étant la science de l'ordre ou de l'étendue. Le mot ″étendu″ fait allusion à l'espace. « Les premières figures géométriques sont celles qui permettent de délimiter un champ et d'en calculer la surface » écrit P. Wagner (2002, p. 70). Ces propos nous renseignent sur l'origine pratique, calculatrice et mesurable de la géométrie. Ces sources confirment que les mathématiques sont inéluctablement la science de la grandeur. Parce que les grandeurs sont du domaine du mesurable, du quantifiable, c'est-à-dire ce qui est déterminé au moyen d'une unité de mesure, les mathématiques font usage des nombres. Elles ne peuvent pas exister sans les nombres. Cela est d'autant plus vrai qu'en Égypte, la naissance des mathématiques est liée à la résolution des problèmes concrets : celui du partage des terres dans le domaine agricole. C'est dire qu'en plus d'être la science de la grandeur les mathématiques sont aussi la science de la précision. Si les mathématiques se sont substituées aux pratiques traditionnelles telles que les doigts de la main, les coudées et les pas des pieds, force est donc de reconnaitre que les mathématiques sont de source empirique. C'est ce qui ressort des propos de P. Wagner (2002, p. 70): « La géométrie est à l'origine une technique parmi tant d'autres, dont les visées sont purement pratiques, les méthodes purement empiriques et les moyens purement matériels ». Il est évident que tous les traits distinctifs des mathématiques que nous venons de souligner ne sont pas inscrits dans les caractéristiques de la logique, parce qu'elle se présente comme étant la science du raisonnement valide. Car, contrairement aux mathématiques, qui font usages des chiffres, la logique étudie la structure externe et interne des propositions, c'est-à-dire qu'elle est une science qui détermine les formes correctes du raisonnement (les propositions). Elle s'intéresse à la qualité, mieux à leur validité et elle ne considère que la forme du raisonnement et non le contenu. Entant que science du langage, la logique étudie essentiellement le raisonnement qui repose sur la façon dont les arguments sont formés. Elle n'a rien à avoir avec la vérité des faits, des jugements ou des suppositions d'où l'argument est tiré. Elle prend seulement garde que cette argumentation soit certainement vraie, si les prémisses sont vraies. Pour cela elle symbolise les propositions. Son but, dit A. Lalande (1997, p. 573), est de

> discuter les caractéristiques des jugements considérés non comme phénomènes psychologiques, mais comme exprimant des connaissances et des croyances ; en particulier elle cherche à déterminer les conditions auxquelles nous avons le droit de passer de certains jugements donnés à d'autres qui en sont les conséquences.

Si donc la logique a pour rôle de traiter ou d'examiner simplement les attributs du raisonnement pour savoir si elle est valide ou non valide, sans tenir compte de son contenu matériel, alors la logique est une science formelle, contrairement aux mathématiques qui apparaissent comme une science concrète. La logique est la science qui établit les règles du bon raisonnement. Cela signifie qu'elle cherche à rendre nos jugements cohérents avec les principes de la raison. Le rôle du logicien est de dégager les règles en vertu desquelles un raisonnement s'accorde avec les règles de la pensée. Aristote, le père de la logique, a essayé de dégager les règles du raisonnement valide. À ce propos, il a étudié plusieurs types de raisonnements dans l'optique de montrer parmi ces jugements ceux qui sont valides ou non valides. Juger, selon Aristote, consiste à attribuer un prédicat à un sujet. Le jugement porte sur une proposition. Une proposition est composée de sujet (ce de quoi on affirme) de prédicat (ce qui est affirmé ou attribué) et de copule (ce qui établit la liaison entre le sujet et le prédicat). À cette dissemblance entre logique et mathématiques nous pouvons ajouter une autre : la nature respective de leur jugement.

Dans la *Critique de la raison pure* et dans les *Prolégomènes à toute métaphysique future qui voudra se présentée comme science*, Kant établit une différence entre les connaissances mathématiques et celles de la logique. Il relève cette dissemblance dans la nature de leurs jugements respectifs. Pour lui, les jugements de la logique sont analytiques. Dans le jugement analytique le prédicat est contenu dans le sujet. Ce type de jugement n'augmente pas notre connaissance, car selon Kant, elle est simplement une tautologie. À l'opposé, les jugements mathématiques sont tous synthétiques et de par leur caractère synthétique, ils fournissent de la connaissance, en ce sens que dans le jugement synthétique, le prédicat n'est pas contenu dans le sujet. Pour établir cette différence, E. Kant (2016, p. 34) affirme :

> Au premier abord, on pourrait penser que 7+5 =12 est une proposition simplement analytique qui découle du concept d'une somme de sept et cinq selon le principe de contradiction. Mais quand on regarde de plus près, on trouve que le concept de la somme de sept et cinq ne contient rien de plus que la conjonction de deux nombres en un nombre unique. Le concept de douze n'est en aucune façon déjà pensé par le fait de penser simplement la conjonction de sept et de cinq, et je peux analyser mon concept d'une telle somme possible, je n'y rencontrerai pas douze.

À travers cette pensée, Kant montre qu'aucune opération mathématiques n'est analytique, car que 8 + 9 soit égale à 17, ce n'est pas une proposition analytique. En effet, nous ne pouvons penser le nombre 17 ni dans la représentation de 8 ni dans celle de 9. Pour lui, ce principe transcendantal des mathématiques se rapportant aux phénomènes, fournit une grande extension de notre connaissance a priori. Le caractère synthétique des jugements mathématiques montre que celles-ci ont recours à l'intuition. « Si nous nous contentions d'analyser ce concept sans recourir à l'intuition, nous ne pourrons jamais trouver la somme » (E. Kant, 2016, p. 34). Ces propos de Kant indiquent que les mathématiciens procèdent de manière intuitive. Ainsi donc, dans le raisonnement mathématique, la synthèse apporte une contribution nécessaire à la construction de la connaissance. Cela signifie que la déduction mathématique ne se limite pas à une validation de la conclusion à partir des prémisses par le moyen de l'analyse comme en logique, c'est-à-dire que le processus logique consiste exclusivement à lier le contenu des prémisses au contenu de la conclusion. Kant montre ici que les mathématiciens sont parvenus à des résultats qu'ils ne pourront jamais obtenir au moyen des prémisses par raisonnement purement logique consistant en une simple analyse des concepts.

Comme E. Kant, H. Poincaré souligne également une différence entre les mathématiques et la logique. Pour lui, en effet, cette différence est que la logique ne parvient pas à préserver les caractéristiques épistémologiques importantes des preuves mathématiques. Par essence, aucune preuve mathématique authentique ne peut être logicisée, car si cela se présente, elle perd ses traits épistémologiques les plus distinctifs. C'est pourquoi H. Poincaré (1906, p. 68), soutient en définitive « qu'il n'y a que peu de place, voire pas de place du tout, pour l'inférence purement logique dans le raisonnement mathématique ». Nous pouvons donc dire à la suite de Kant et de Poincaré que les mathématiques ne sont pas réductibles à la logique. Mais, il est fort probable que, si des divergences subsistent entre les mathématiques et la logique, il y a également dans leur relation des points d'ancrage à enseigner.

2- Convergence entre mathématiques et logique

Les mathématiques et la logique se rejoignent sur plusieurs points. Le philosophe Allemand Leibniz est l'un de ceux qui pensent que les mathématiques peuvent être réduites à la logique. Pour Leibniz, en effet, les énoncés mathématiques et les énoncés logiques sont de la même nature. De ce fait, il a montré qu'il est possible de calculer sur bien d'autres choses que les nombres. Il estime qu'il existe, certes, une mathématique des nombres, mais, il peut y avoir aussi une mathématique des concepts, des propositions, des classes, etc. Or qui parle de proposition parle de logique et qui parle de calcul se trouve dans le domaine des mathématiques. Aujourd'hui, cette distinction n'existe presque plus, car, il existe des calculs en logique, telle que les calculs propositionnels qui « étudient les relations logiques qui dépendent de la manière dont certaines propositions sont composées à partir d'autres au moyen d'opérations dans lesquelles ces propositions interviennent comme des blocs inanalysés » (I. A. Yapi, 2018, p. 15). Si la logique ne se contente pas de formaliser les propositions, mais arrive à instaurer des calculs en son sein, nous pouvons affirmer avec J. Adda (1971, p. 2) que « la logique est une partie des mathématiques au même titre que l'algèbre et la géométrie, chacune de ces parties peut être caractérisée par l'espèce d'objets qu'elle traite». En effet, si l'histoire veut tracer une ligne de démarcation entre les mathématiques et la logique, en présentant les mathématiques comme une connaissance basée sur le mode de calcul ayant pour objet les chiffres et la logique comme une théorie qui se contente de formuler les préceptes de la déduction correcte, aux yeux de Leibniz, cette démarcation n'est qu'apparente. Car, selon lui, toute déduction est un calcul et tout calcul quand il est mis en forme se présente comme une déduction. Il le montre à travers cette démonstration :

« 2 et 2 est 2 et 1……….2 +2
2et 1 et 1 est 3 et 1……2 +1+1+1
3 et 1est 4…………………3 +1
……
4 », (G.W. Leibniz, 1966, p. 364).

À travers cette démonstration, l'auteur des *Nouveaux essais sur l'entendement humain*, révèle qu'il est possible d'établir une similitude entre une déduction logique et un calcul mathématique, en ce sens que bon nombre de calculs non numériques comme celui du syllogisme peuvent être transformés facilement en calculs numériques. Ainsi, Leibniz (1966, p. 432), va se faire une autre idée plus considérable de la logique en ces termes : « Je commence à me faire une tout autre idée de la logique que je n'en avais autrefois. Je la prenais pour un jeu d'écolier, et je vois maintenant qu'il y a comme une mathématique universelle, de la manière que vous l'entendez ».

À l'instar de Leibniz, plusieurs autres savants vont partager cette conception, à savoir que mathématiques et logique sont deux disciplines analogues. Comme telle, les savants comme

Boole, Frege et Russell, vont développer une philosophie qui va confirmer l'étroite relation entre mathématiques et logique. À ce propos, nous avons l'algèbre de Boole. Cette théorie de Boole constitue la partie des mathématiques qui confirme l'existence d'une approche algébrique de la logique à travers les termes comme variables, opérateurs et fonctions sur les variables logiques. Cela permet d'utiliser les méthodes algébriques pour traiter les expressions bien formées et de calculer leurs valeurs logiques. C'est justement l'union sacrée engendrée entre logique et mathématique par l'algèbre de Boole que J. Piaget (1967, p. 9) souligne en ces termes :

> Avec la découverte de l'algèbre de Boole, on s'est aperçu des connexions étroites qui existent entre la logique et l'algèbre générale. Grâce à l'emploi d'algorithmes de plus en plus précis et en relation d'autre part, avec le développement de la théorie algébrique des structures, la logique est donc devenue inséparable des mathématiques.

À la suite de Boole, Frege, dans ce même ordre d'idée va logiciser les mathématiques. En effet, en 1879, il va construire une écriture conceptuelle dégagée de l'emprise des mots du langage ordinaire afin de matérialiser les deux hypothèses suivantes : « 1) l'arithmétique est de part en part logique. 2) l'induction mathématique ne suppose aucune intuition » (D. Lecourt, 2019, p. 513). En plus, dans le tome II de son ouvrage *Les lois fondamentales de l'arithmétique,* Frege prend le contrepied des formalistes qui limitent l'arithmétique à une interprétation des signes et réitère son logicisme en imposant une nécessaire référence aux signes mathématiques. En outre, qu'il s'agisse, avec Boole, de mathématiser la logique, ou de logiciser les mathématiques avec Frege, l'évolution de la logique s'est déroulée dans le sens d'une liaison étroite entre mathématiques et logique. C'est précisément ce qui justifie le terme logique mathématique forgé par G. Peano dans son *Formulaire de mathématique* en 1894. Bertrand Russell partage cette conception de rapprochement entre mathématique et logique, dans la mesure où pour lui, le raisonnement mathématique peut être réduit à un raisonnement purement logique. Car, aux yeux de Russell, si antérieurement les mathématiques et la logique ont été étudiées de manière spécifique, il n'existe plus aujourd'hui de frontières entre les mathématiques et la logique. Il affirme à cet effet :

> Au cours de l'histoire, les mathématiques et la logique ont eu longtemps des destins séparés. Les mathématiques étaient liées aux sciences, la logique à la culture grecque. Mais elles se sont profondément modifiées à notre époque : la logique est devenue de plus en plus mathématique, les mathématiques de plus en plus soucieuses de logique. Le résultat de cette évolution est qu'il est devenu impossible de tracer une nette ligne de démarcation entre les deux ; elles sont devenues une seule et même discipline. (B. Russell, 1991, p. 357).

À travers ces propos Russell présent les mathématiques et la logique comme les faces d'une même médaille, dans la mesure où, aujourd'hui, la démarche mathématique ne peut se départir de la méthode logique et la logique également ne peut entreprendre une investigation sans faire appel aux mathématiques :

> La recherche moderne en mathématique touche si nettement aux frontières de la logique, et la logique moderne de son côté est devenue symbolique et formelle, que l'étroite relation entre logique et mathématique est devenue manifeste aux yeux de n'importe quel étudiant un peu instruit (B. Russell, 199, P. 358).

Nous avons à travers cette affirmation de Russell, les preuves de l'étroitesse des relations entre logique et mathématique, en ce sens que la démarche mathématique trouve sa compensation dans celle de la logique et vice versa. C'est justement ce que confirme M. Detlefsn, (2011, p. 65) en ces termes : « Russell démontre qu'il existe une contrepartie logique pour chaque théorème mathématique ». Ainsi, pour lui, chaque preuve mathématique trouve sa compensation dans le système logistique. Cette complémentarité entre mathématiques et logique confirme les propos de J. Adda (1971, p. 1) en ces termes :

> Le temps n'est plus où Bertrand Russell recevait du philosophe Wiliam James cet avertissement : dites bonsoir à la logique mathématique si vous souhaitez garder le contact avec la réalité concrète, ou plutôt s'il est encore des partisans d'un enseignement mathématique tellement aveuglés par les réalités concrètes qu'ils ignoraient la réalité des fondements logiques de la pensée mathématiques.

Au regard de ce qui précède, nous pouvons dire qu'il est manifestement inutile, voire incompréhensible, de dresser une ligne de démarcation entre les mathématiques et la logique. Car, les mathématiques et la logique apparaissent comme le recto et le verso d'une même feuille de telle sorte qu'il est impossible de couper le recto sans porter atteinte au verso. Elles construisent toutes deux des raisonnements, utilisent des symboles, proposent des démonstrations et même des théorèmes. Et, c'est ce tandem, logique-mathématique, qui, aujourd'hui joue des rôles de première main dans la démarche scientifique.

II- Rôle des mathématiques et de la logique dans la démarche scientifique

Les mathématiques et la logique sont deux des branches de la science. Chacune d'elles contribuent valablement à l'évolution de la science à travers des rôles spécifiques qu'elles jouent dans la démarche scientifique. Particulièrement, le rôle de la logique est axé sur la forme du discours scientifique.

1- La logique : forme du discours scientifique

La logique, nous le rappelons, est l'étude des lois formelles de la pensée, c'est-à-dire de ce qui se traduit uniquement et de façon permanente par l'intelligence humaine. Elle se présente de prime abord comme la science des conditions de la démonstration scientifique, c'est-à-dire les exigences que la pensée doit remplir pour parvenir à la vérité. J. Piaget (1967, p. 4), le confirme en ces mots : « La logique est l'étude des conditions formelles de vérité ». De cette définition découlent deux conséquences. La première conséquence est que la forme étant détachée du sujet et des objets, c'est-à-dire du contenu, la logique est une recherche purement normative. Autrement dit, elle est une science qui donne des règles et des préceptes de démonstrations. Cela veut dire que la vérité formelle est une affaire de validité déductive.

Effectivement, la logique est une science déductive. Car, sous le terme syllogisme qui signifie en grec conclusion, Aristote a défini un ensemble de trois propositions tel que si les deux premières sont admises, il y a nécessité d'admettre une troisième. De ce fait, le syllogisme apparait comme le schéma ou le modèle du raisonnement déductif dont s'inspire la démarche scientifique :

> le syllogisme ou la déduction est un discours dans lequel, certaines choses ayant été posées, une chose distincte de celles qui ont été posées s'ensuit nécessairement, du fait que celles-là sont. (…). Je veux dire qu'on n'a pas besoin de quoi que ce soit d'extérieur en plus pour que la nécessité en résulte (Aristote, 2014, p. 92).

Le discours dont parle Aristote dans cette définition est sans nul doute, le discours scientifique qu'A. Lalande (1997, p. 237) conçoit comme « une opération intellectuelle qui s'effectue par une suite d'opérations élémentaires partielles et successives. Spécialement, expression et développement de la pensée par une suite de mots ou de propositions qui s'enchainent». Le discours scientifique est entendu ici dans le sens d'une opération de l'esprit humain dans le cadre de la recherche en science afin de construire et de diffuser le savoir, à travers un enchainement de mots, d'expressions ou de propositions. Cet enchainement est une suite de pensée rationnellement ordonné. Il se présente sous la forme de démonstration d'une certaine relation entre un sujet et un objet, c'est-à-dire un jugement. La logique a pour objet de déterminer les formes valides du discours scientifique et de la pensée. Cette forme du discours scientifique se développe avec une cohérence. Dans le raisonnement logique, la cohérence est la condition nécessaire de toute démonstration ou de toutes pensées vraies. Ainsi, le discours scientifique, pour être logiquement valide, doit obéir aux principes fondamentaux de la logique : le principe d'identité, le principe du tiers exclu et le principe de non-contradiction.

Le principe d'identité est le premier des trois grands principes logiques de l'Antiquité. « Le principe d'identité affirme qu'une chose, considérée sous un même rapport, est identique à elle-même » (R. Caratini, 2000, p. 148). On l'exprime sous la forme suivante : ce qui est, est. [A est A] et ce qui n'est pas n'est pas. Le principe d'identité traduit la cohérence de l'être. Il exprime également la cohérence du discours, de la connaissance, du langage, mieux du discours. Le principe d'identité montre que dans une démonstration ou dans un discours scientifique toute désignation doit conserver une permanence. À ce propos, le principe d'identité présente deux versions : la version ontologique et la version logique. La version ontologique dit : une chose est ce qu'elle est. En langage logique il s'écrit : [(P ≡ P)]. Quant à la version logique, elle porte sur la connaissance formelle, elle affirme que ce qui est vrai est vrai et ce qui n'est pas vrai n'est pas vrai.

Outre le principe d'identité, la démonstration logique obéit à un autre principe fondamental : le principe de non-contradiction ou le refus de la contradiction. La contradiction est une relation existant entre deux termes ou deux propositions dont l'une affirme ce que l'autre nie. La contradiction pose la réalité du conflit. Il est impossible de penser en même temps A et non-A, si A est vraie non-A est fausse et si A est fausse non-A est vraie. Cette loi, la logique la refuse tout simplement, parce que lorsqu'il y a une contradiction dans l'élaboration du savoir, ou dans la démarche scientifique, cela confirme l'existence d'une erreur dans la démarche, dans ce cas, nous devons chercher une solution, c'est-à-dire à éradiquer l'erreur et cette solution réside dans la suppression de la contradiction. Donc les contradictions sont inacceptables dans la démarche scientifique. Cela signifie que dans une démarche scientifique, on ne peut pas attribuer les valeurs vraie et fausse à la fois à une même proposition ou à une même variable. Car, dit Aristote (2014, p. 1786), « la finalité n'est pas de dire si une chose est, ou, n'est pas, mais de dire quelque chose qui présente une signification pour soi et pour autrui ». Ainsi, pour éviter les erreurs dans le savoir scientifique, la logique adopte la non-contradiction comme un principe fondamental.

Le prince de non-contradiction énonce qu'une chose ne peut pas à la fois être et ne pas être. Il est nécessairement impossible qu'une chose soit et ne soit pas en même temps. Une proposition logique ne peut pas être à la fois vraie et fausse. Aristote (2014, p. 1786), dans son ouvrage *Métaphysique* l'exprime en ces termes : « il est impossible, pour une même chose, d'être et de n'être pas en même temps, et il est impossible que le même attribut appartienne et n'appartienne pas en même temps, au même sujet et sous le même rapport ». Cela veut dire que P ne peut être à la fois q, et non-q : Arthur ne peut être à la fois coupable et non coupable. Selon Aristote, le principe de non-contradiction est le plus sûr de tous les principes, parce qu'il est le principe sur lequel l'erreur est impossible. Sa formalisation est : [7(P Λ 7P)]. En plus du principe d'identité et du principe de non-contradiction, la démarche logique prône un troisième principe : le principe du tiers exclu.

Le principe du tiers exclu ou le principe de radicalité stipule que, de deux propositions dont l'une est négative de l'autre, si l'une est fausse, l'autre est nécessairement vraie. Un objet existe ou n'existe pas, sans aucune autre alternative. Pour le père de la logique, en effet, toute proposition est nécessairement vraie ou fausse sans valeur intermédiaire possible. Il le souligne dans la définition du principe du tiers exclu, à travers ces mots : « il n'est pas possible non plus qu'il y ait aucun intermédiaire entre des énoncés contradictoires : il faut nécessairement ou affirmer, ou nier un seul prédicat, quel qu'il soit, d'un seul sujet » (Aristote, 2014, p. 1798). Tout comme les deux autres principes, le principe du tiers exclu joue un rôle important dans les raisonnements logiques, puisque le raisonnement par l'absurde est basé sur le principe du tiers exclu. Dans le raisonnement, sa démarche est : on veut prouver que ''F''est valide ou non valide, alors on suppose non-F. On combine avec une des prémisses et on tombe sur la négation d'une autre prémisse. Cela montre que le principe du tiers exclu est au fondement de la méthode de preuve par l'absurde. Cette méthode consiste à démonter la vérité d'une proposition en démontrant que l'hypothèse de sa contradiction conduit à une contradiction. Le principe du tiers exclu est noté : [(PV 7P)].

Toute démarche ou discours scientifique ne sera cohérent en chacun de ses jugements et déduction qu'en restant conformes aux règles logiques, particulièrement à ces trois principes fondamentaux. En plus de la cohérence, la conformité avec ces lois logiques permet d'éviter les erreurs qui peuvent survenir dans l'élaboration du savoir scientifique. Comme nous le constatons, la logique et ses principes construisent la forme de nos raisonnements afin de mettre en évidence les erreurs du discours scientifique uniquement du point de vue de la forme et non du contenu. Cette démarche formelle demeure néanmoins un modèle qui inspire toutes les sciences déductives.

Les sciences mathématiques sont certes jugées par la concordance de leur discours avec l'objet du discours, mais, elles calquent leur démarche sur la méthode logique. Car, dans leurs démarches, elles partent des principes généraux et en déduisent des vérités particulières. Ce qui veut dire que c'est la figure générale de la déduction rationnelle donnée par Aristote à travers le syllogisme porté par le modus ponens[1] et le modus tollens[2] qui assurent la rigueur et la vérité scientifiques. Aussi, la structure du raisonnement mathématique pose au début de sa démonstration deux assertions qui sont les axiomes et les postulats considérés comme des vérités évidentes. Tout comme le logicien, le mathématicien demande d'admettre les axiomes et les postulats parce qu'elles sont nécessaires dans le processus de la démonstration. C'est justement des axiomes et des postulats que les scientifiques délivreront les propositions démontrées qu'on appelle théorèmes. En d'autres termes, les actes scientifiques partent des axiomes et des postulats vers les théorèmes, l'enchainement des preuves étant régulé par une série de conditions exprimée dans les principes et aucune étape de la démonstration n'étant franchie sans le respect d'un principe établi. C'est pourquoi, pour réaliser son rêve qui consiste à assoir l'infaillibilité d'un raisonnement scientifique, Leibniz fait d'un raisonnement un théorème et d'une discussion, un système d'équation. Cela dans le but de le recommander en cas de crise. Il justifie ses propos en ces termes :

> iI faut savoir que, par les arguments en forme, je n'entends pas seulement cette manière scolastique d'argumenter dont on se sert dans les collèges, mais tout raisonnement qui conclut par la force de la forme, et où l'on n'a besoin de suppléer aucun article, de sorte qu'un sorite, un autre tissu de syllogisme qui évite la répétition, même un compte bien dressé, un calcul d'algèbre, une analyse des infinitésimales me seront à peu près des arguments en forme, parce que leur forme de raisonner a été prédémontrée, en sorte qu'on est sûr de ne s'y point tromper » (G. W. Leibniz, 1966, p. 425).

De ce qui précède, nous pouvons affirmer avec certitude que la logique en tant que forme du discours scientifique sert de modèle à toute déduction scientifique. Elle invite au respect

[1] Ponens vient du latin ″poneré″ qui signifie poser. En logique des propositions, le modus ponens est une forme d'argument valide et une règle d'inférence. Elle affirme que si p implique q, alors si p est vraie, q est vraie. $\models ((p \supset q) \land p) \supset q$

[2] Tollens du latin ″toléré″ veut dire tolérer. En logique des propositions, tout comme le modus ponens, le modus tollens est aussi est une forme d'argument valide et une règle d'inférence. Cette règle dit que si une proposition p implique une proposition q, alors si q est fausse, p est fausse. $\models ((p \supset q) \land 7q) \supset 7p$.

scrupuleux des règles pour mener à bien une démarche intellectuelle. Quant aux mathématiques, elles constituent la preuve des théories scientifiques.

2- Les mathématiques : preuve de l'objectivité des théories scientifiques

La démarche scientifique est une suite d'actions visant à comprendre le réel. Pour répondre à une question, issue d'une observation du réel, des hypothèses sont testées puis infirmées ou confirmées ; dans le cas d'une confirmation naît alors une théorie ou un modèle. Qu'est-ce donc qu'une théorie ? Disons qu'une théorie scientifique est une explication d'un aspect d'un phénomène naturel qui peut être testé et vérifié de façon réversible, conformément à la méthode scientifique au moyen d'observation, de mesures et d'évaluation des résultats. Elle apparait comme le couronnement d'une enquête scientifique fondée sur une observation minutieuse des phénomènes. Elle permet aux savants de prédire des évènements à travers une déduction rigoureuse. Le caractère scientifique d'une prédiction est fondé sur l'exactitude prédictions des évènements et la science qui est utilisée comme source de l'exactitude des évènements prédits est sans doute les mathématiques. En effet, pendant de nombreux siècles, les mathématiques ont été conçues comme la preuve de la vérité par excellence et des savants étaient convaincus de leurs certitudes inébranlables. Depuis la formalisation de la géométrie par Euclide dans les *Éléments*, les mathématiques se sont efforcées de construire leurs théories en respectant les principes logiques et de déduction admises par tous, en leur conférant un statut de vérité absolue. « La géométrie classique, sous la forme qui lui a été donnée par Euclide dans ses *Éléments*, a longtemps passé pour un modèle insurmontable, et difficilement égalable, de théorie déductive » (R. Blanché, 2016, p. 9). Pourquoi les mathématiques sont-elles insurmontables et rarement égalables ? Si les mathématiques ont atteints un tel niveau de vérité ou d'objectivité, parce que les mathématiques ne se limitent pas à la forme des démonstrations, elles apportent la preuve de ce qu'elles affirment : « le géomètre ne procède pas que par voie démonstrative, il fonde ses preuves que sur ce qui a été antérieurement établi » (R. Blanché, 2016, p. 9). Les mathématiques constituent, le domaine de la vérité, grâce aux preuves qu'elles joignent à la rigueur de la démonstration.

Ainsi, vu leur rôle dans la démarche scientifiques, les mathématiques sont considérées comme des sciences à la fois exactes et matérielles. Elles sont une science exacte, parce qu'elles étudient certes des objets abstraits, mais, en même temps, elles déduisent leurs propriétés à partir d'un raisonnement déductif irréfutable. Elle est également une science matérielle, dans la mesure où le contenu du discours mathématique est conforme à la réalité. « Les axiomes ne sont pas des propositions arbitraires, mais ils correspondent à des évidences et sont en adéquation avec le réel. » (Euclide, 1990, p. 57). À l'instar d'Euclide, Descartes au XVIIe siècle, va développer une philosophie soutenant l'idée selon laquelle les mathématiques constituent un véritable modèle de vérité scientifique. Pour Descartes, ces figures mathématiques qui sont le point, la droite, le cercle etc., constituent des germes de vérité qui sont naturellement en nous et sont les premiers dans l'ordre de la connaissance scientifique. Cette démarche repose sur la déduction. Or la déduction permet de conclure à partir de propositions initialement posées comme vraies les conséquences qui en résultent indubitablement. Elle donne donc lieu à une certitude, à une vérité objective, car elle repose sur des faits eux-mêmes vrais, indiscutables et évidents au départ. « Ils sont si clairs et si distincts que la raison ne peut les mettre en doute », (R. Descartes, 2000, p. 111). Cette affirmation de Descartes justifie le statut des mathématiques dans la construction de la connaissance scientifique en tant que source première de la connaissance objective et intégrale. C'est ce que R. Blanché (2016, p. 14) souligne en ces termes : « la vérité mathématique prend ainsi un caractère global : c'est celle d'une vaste implication, où la conjonction de tous les principes constitue l'antécédent, et celle de tous les théorèmes le conséquent. La démonstration mathématique était catégorique et apodictique. Elle disait : ces principes étant vrais absolument, telle proposition que j'en déduis, est donc vraie aussi ».

Si la connaissance mathématique a acquis le statut de connaissance universelle, la raison réside dans le fait qu'elle tire les fondements de ses preuves dans les deux sources du savoir. En effet, la connaissance mathématique est une sorte de synthèse de la raison et de l'expérience. R. Blanché (2016, p. 14) le confirme encore en ces termes : « un théorème de géométrie était à la fois un renseignement sur les choses et une construction de l'esprit, une loi physique et une pièce d'un système logique, une vérité des faits et une vérité de raison ». En nous appuyant sur la pensée de Blanché, nous pouvons dire que la connaissance mathématique est une connaissance construite par un raisonnement rigoureux et testée par l'expérience. Ainsi, les mathématiques se présentent comme un modèle de rigueur et une science objective. Car cette façon de construire la connaissance a été productive à l'évolution de la science. Puisqu'elle est à l'origine d'une multitude de théories nouvelles, en inaugurant de nouvelles voies à la recherche scientifique et a donné de nouvelles perspectives à la pensée humaine.

Conclusion

Les mathématiques et la logique sont deux disciplines scientifiques. Les mathématiques, science des grandeurs sont considérées comme une connaissance empirique. La logique en tant que science des principes généraux de la pensée est d'origine rationnelle. En plus, la nature de leurs jugements synthétiques a priori pour les mathématiques et jugements analytiques pour la logique, ont suffi pour affirmer que les mathématiques et la logique sont opposées. C'est ce qui ressort chez des philosophes comme Emmanuel Kant et Henri Poincaré. Mais, à y voir de prêt, ces divergences n'existent que de forme. Car, les réformes apportées par des logiciens modernes comme Russell, Frege, Boole ont contribué fortement à une logicisation des mathématiques ou à une mathématisation de la logique. Cette réforme a engendré la logique-mathématique qui a contribué à abolir la frontière entre mathématique et logique. Cela signifie que ces deux disciplines sont étroitement liées. La preuve, leurs rôles se complètent dans la démarche scientifique. En somme, si la logique dans son rôle se présente comme la forme du discours scientifique, les mathématiques, quant à elles, apparaissent comme la preuve de l'objectivité des théories scientifiques. En somme mathématique et logique

> diffèrent comme l'enfant et l'homme fait : la logique est la jeunesse des mathématiques, les mathématiques sont de la logique à l'âge adulte. D'où le ressentiment des logiciens qui après avoir consacré tout leur temps à l'étude des textes classiques, sont incapables de suivre un raisonnement sous forme symbolique, d'où aussi celui des mathématiciens, qui ont appris une technique sans jamais s'inquiéter de son sens ni de sa justification » (B. Russell, 1991, p. 357).

Ces propos de Russell met à en exergue la complémentarité entre les deux disciplines. Cette complémentarité épistémique entre les mathématiques et la logique est non seulement la source de la cohérence, de la rigueur de la démarche scientifique, mais elle est aussi à l'origine du progrès spectaculaire des sciences. En somme, si la connaissance scientifique est vue comme étant la connaissance la plus sure dans l'approche du réel, c'est en partie grâce aux rôles combinés des mathématiques et de la logique. Car, confirme B. Russell (1991, p. 357-358) « il s'agit là des frontières actuelles de la connaissance : au-delà, commence l'inconnu, sans compter que c'est un domaine du savoir encore peu sûr ». Au regard de cette affirmation de Russell, nous pouvons conclure qu'une connaissance sans le secours des mathématiques et de la logique est connaissance incertaine.

BIBLIOGRAPHIE

ADDA Josette, 1971, *Éléments de logique pour servir à l'enseignement mathématique*, Paris,

ARISTOTE, 2014, *Métaphysique*, in Œuvres Complètes, Paris, Éditions Flammarion.

ARISTOTE, 2014, *Premiers Analytiques*, in Œuvres Complètes, Paris, Éditions Flammarion.

CARATINI Roger, 2000, *Initiation à la philosophie*, L'Archipel.

DESCARTES René, 2000, *Discours de la méthode*, introduction, dossiers et notes de Denis

Moreau, Paris, Vrin.
DETLEFSN Michael, 2011, *Poincaré versus Russell sur le rôle de la logique dans les mathématiques*, in Revue les Études philosophiques/2 N°97.
KANT Emmanuel, 2016, *Prolégomènes à toute métaphysique future qui pourra se présenter comme science.* Trad. Louis GUILLERMIT, Paris, Vrin.
LEIBNIZ Gottfried Wilhelm, 1966, *Nouveaux essais sur l'entendement humain*, chronologie et introd. par Jacques Brunschvicg, Paris : Garnier-Flammarion.

PIAGET Jean, 1967, *Logique et connaissance scientifique*, Paris, Éditions Gallimard.

RUSSELL Bertrand, 1991, *Introduction à la philosophie mathématique*. Trad. François Rivenc, Paris, Éditions Payot.
WAGNER, Pierre, 2002, *Les philosophes et la science*, Paris, Éditions Gallimard.

YAPI Ignace, 2018, *Précis de logique élémentaire, Introduction au calcul des propositions et des prédicats du premier ordre*, Bouaké LE PAPYRUS éditions.
DICTIONNAIRE
LALANDE André, 1997, *Vocabulaire technique et critique de la philosophie*, volume 1 & 2, Paris, Quadrige/ PUF.
LECOURT Dominique, 2019, *Dictionnaire d'histoire et philosophie des sciences*, Paris, PUF.